

Concours National Commun - Session 2008

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II

Sur les classes de similitude de matrices carrées d'ordre 2

Corrigé par M.TARQI

I. Résultats préliminaires

1. (a) Une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est semblable à A si et seulement si il existe une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ tel que $B = PAP^{-1}$, donc $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{PAP^{-1}; P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\}$.
- (b) Il est clair que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(xI_2) = \{P(xI_2)P^{-1}; P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\} = \{xI_2\}$ est singleton.
2. (a) On a $\det E_\lambda = F_\lambda = 1 \neq 0$, donc les deux matrices sont inversibles, $E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{-\lambda}$ et $F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = F_{-\lambda}$.
- (b) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda c + a & -c\lambda^2 + (d-a)\lambda + b \\ c & -c\lambda + d \end{pmatrix}$$

et

$$F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} b\lambda + a & b \\ -b\lambda^2 + (a-d)\lambda + c & b\lambda + a \end{pmatrix}.$$

- (c) Dans ce cas on aura $\forall P \in \text{GL}_2(\mathbb{K}), PAP^{-1} = A$, en particulier on aura $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda c + a & -c\lambda^2 + (d-a)\lambda + b \\ c & -c\lambda + d \end{pmatrix} = A$$

et

$$F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} b\lambda + a & b \\ -b\lambda^2 + (a-d)\lambda + c & b\lambda + a \end{pmatrix} = A.$$

On obtient donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\begin{cases} a + \lambda c = a \\ -c\lambda^2 + (d-a)\lambda + b = b \\ d - c\lambda = d \end{cases}$ et $\begin{cases} a - \lambda b = a \\ -b\lambda^2 + (a-d)\lambda + c = c \\ a + c\lambda = a \end{cases}$. D'où $a = d$ et $b = c = 0$ et par conséquent $A = aI_2$.

3. (a) Soit φ l'isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K}^4 défini par :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d).$$

Ainsi $\|A\|_S = \|\varphi(A)\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de \mathbb{K}^4), donc $\|\cdot\|_S$ est une norme.

- (b) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$AA^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix},$$

donc $\text{tr}(AA^*) = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = \|A\|_S^2$.

Comme $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, alors

$$\|U^*AU\|_S^2 = \text{tr}(U^*AU(U^*AU)^*) = \text{tr}(UU^*AA^*) = \text{tr}(AA^*) = \|A\|_S^2,$$

de même $\|UAU^*\|_S = \|A\|_S$.

4. (a) Les deux parties en question sont des parties d'une partie bornée, donc elles sont bornées.
- (b) Soit $M > 0$ tel que $\forall B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A), \|B\|_S \leq M$. En particulier, on aura pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\|E_\lambda A E_\lambda^{-1}\|_S \leq M$ et $\|F_\lambda A F_\lambda^{-1}\|_S \leq M$, donc d'après les calculs faites dans la question 2.(b), on obtient $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} |a + \lambda c|^2 \leq M \\ |a + \lambda b|^2 \leq M \\ |b + (d-a)\lambda - c\lambda^2|^2 \leq M \end{cases},$$

donc nécessairement $a = d$ et $b = c = 0$ et par conséquent $A = aI_2$.

5. Toute partie compacte est bornée, donc si $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(B)$ est compacte, alors B est une matrice scalaire.
6. tr est une forme linéaire, donc continue, et $A \mapsto \det$ est le composé de deux applications continues $A = [C_1, C_2] \mapsto (C_1, C_2)$ (linéaire en dimension finie) et $(C_1, C_2) \mapsto \det(C_1, C_2)$ (bilinéaire en dimension finie), donc l'application $A \mapsto \det A$ est continue.
7. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ semblables, alors il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$, donc les propriétés de tr et \det , on a :
 - $\text{tr}(B) = \text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PA) = \text{tr}(A)$.
 - $\det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det P \det A \det P^{-1} = \det A$.
 - $\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \det(P(A - \lambda I_2)P^{-1}) = \det(P - \lambda I_2) = \chi_A(\lambda)$.

II. Condition pour qu'une matrice de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

1. (a) A admet deux valeurs propres distinctes, donc diagonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
- (b) Si A est diagonalisable, alors il existe P matrice inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda I_2.$$

La réciproque est évident.

- (c) Dans ce cas $\dim E_\lambda = 1$ ($E_\lambda = \text{Vect}\{u\}$ le sous-espace caractéristique associé à λ). Soit v un vecteur (non nul) vérifiant $(A - \lambda I_2)v = u$ et forme avec u une base, alors dans cette base la matrice canoniquement associée A s'écrit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. (a) Si $A = xI_2$, alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$ est un singleton, donc est un fermé.
- (b) On a $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donc $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lambda I_2$. La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, car $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et qui converge vers $\lambda I_2 \notin \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, donc si A est non diagonalisable, alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermé.
- (c) i. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1} = P_k A P_k^{-1} - \alpha I_2$, donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1} = (B - \alpha I_2),$$

et par continuité de l'application \det ,

$$\det(B - \alpha I_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \det(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1}) = 0.$$

- ii. D'après la dernière question, $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(B) = \{\lambda, \mu\}$, donc B est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, donc $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$. Ainsi on a montré que toute suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ converge dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, donc $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.
3. Tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ admet des racines, donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ est toujours non vide.
 - Si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, alors A est diagonalisable et donc $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.
 - Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, alors si A est diagonalisable, alors $A = \lambda I_2$ et dans ce cas $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.
 Réciproquement, et dans les cas, supposons $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée, donc si A est non diagonalisable, alors d'après la question 2.(b) de cette partie, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée ce qui est faux.
4. (a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$, donc si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors χ n'a pas de racines et donc $\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A < 0$.
- (b) On sait d'après le théorème de Cayley-Hamilton que $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)I_2 = 0$, donc on obtient :

$$\begin{aligned} A'^2 &= \frac{4}{\delta^2} \left(A - \frac{\text{tr } A}{2} I_2 \right) \left(A - \frac{\text{tr } A}{2} I_2 \right) \\ &= \frac{4}{\delta^2} \left(A^2 - (\text{tr } A)A + \frac{(\text{tr } A)^2}{4} I_2 \right) \\ &= \frac{4}{\delta^2} \left(-(\det A)I_2 + \frac{(\text{tr } A)^2}{4} I_2 \right) = -I_2 \end{aligned}$$

(c) On a d'abord $f(e) \neq 0$, car sinon $e = -f^2(e) = 0$. Soient α et β des réels tels que $\alpha e + \beta f(e) = 0$, donc $\alpha f(e) + \beta f^2(e) = \alpha f(e)e - \beta e = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $e = \frac{-\beta}{\alpha} f(e)$ et donc $(\alpha^2 + \beta^2)f(e) = 0$, et ceci est absurde, ainsi $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$. Donc $\{e, f(e)\}$ est une base de \mathbb{R}^2 et la matrice de f dans cette base s'écrit $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Soit $P = [e, f(e)]$ la matrice de passage canonique à la base $\{e, f(e)\}$, alors on a $A' = P^{-1}A'P$, donc

$$\frac{2}{\delta} \left(A - \frac{\text{tr } A}{2} I_2 \right) = P^{-1} A_1 P$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} A &= \frac{\text{tr } A}{2} I_2 + \frac{\delta}{2} P^{-1} A_1 P \\ &= P^{-1} \left(\frac{\text{tr } A}{2} I_2 + \frac{\delta}{2} A_1 \right) P \\ &= \frac{1}{2} P^{-1} \begin{pmatrix} \text{tr } A & -\delta \\ \delta & \text{tr } A \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1} A'' P. \end{aligned}$$

Donc les deux matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(e) i. On a $\lim_{k \rightarrow \infty} (P_k A P_k^{-1}) = \tilde{A}$, donc par continuité des applications tr et \det , on obtient $\text{tr } \tilde{A} = \text{tr } A$ et $\det \tilde{A} = \det A$.

ii. A et \tilde{A} ont même trace et même déterminant donc d'après la question 4. de cette partie, les deux sont semblables à A'' , donc elles sont semblables.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si A est diagonalisable alors $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée, d'après la question 3. de cette partie.

$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, d'après la dernière question, sa limite reste dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$, c'est-à-dire $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée.

Réciproquement, supposons $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée. Trois cas sont possibles, soit $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$ est donc A est diagonalisable, ou bien $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda\}$ et dans ce cas $A = \lambda I_2$, car sinon $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ sera non fermée, ou bien $\text{Sp}(A) = \emptyset$.

Ainsi on a montré que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable ou bien $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

III. Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Un résultat de réduction

(a) Tout polynôme de degré 2 qui a une racine dans \mathbb{K} est scindé, donc si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(G) \neq \emptyset$, alors χ_G est scindé dans \mathbb{K} .

(b) D'après le cours, on a :

$$u_1 = \frac{u'_1}{\|u'_1\|} \text{ et } u_2 = \frac{u'_2 - (u'_2|u_1)u_1}{\|u'_2 - (u'_2|u_1)u_1\|}$$

(c) Si $u_1 = ae_1 + be_2$ et $u_2 = ce_1 + de_2$, alors $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et comme $\{u_1, u_2\}$ est une base

orthonormée, alors $\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{c} + b\bar{d} = 0 \end{cases}$. Autrement dit, $UU^* = I_2$.

(d) u_1 et u'_1 étant colinéaires, donc $g(u_1) = \lambda u_1$. Soient α et β des scalaires tels que $g(u_2) = \alpha u_1 + \beta u_2$, donc $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, donc nécessairement $\beta = \mu$, et puisque U est la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2\}$ à la base $\{u_1, u_2\}$, alors $G = UTU^{-1} = UTU^*$. On a évidemment $\|G\|_S = \|T\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2}$.

2. Calcul d'une borne inférieure

(a) L'ensemble $\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\}$ est une partie non vide, car elle contient $\|A\|$, et minorée (par 0), donc admet une borne inférieure.

(b) Soit $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et donc il existe $U \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que

$$B = U \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} U^*$$

(λ et μ les valeurs propres de B).

$$\text{Ainsi } \|B\|_S = \|UTU^*\|_S = \|T\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2} \geq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$$

(c) Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, on prend $\alpha = 0$. Si $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, alors puisque A est trigonalisable, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on peut toujours trouver une base de \mathbb{K}^2 dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$$

(d) D'une part on a $\forall B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, $\|B\|_S \geq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$. D'autre part $\forall t \in \mathbb{K}^*$, $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A), \lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ et } \left\| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}, \text{ donc}$$

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}.$$

(e) Si A est diagonalisable, alors $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et donc

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} = \left\| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\|_S,$$

donc la borne inférieure de $\{\|PAP^{-1}\|_S / P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\}$ est atteint.

Inversement, soit $G \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ telle que $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \|G\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$. Mais d'après la question 1., il existe matrice $U \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $UU^* = I_2$ et $G = UTU^*$, donc $T \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et par conséquent

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} = \|G\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2 + |\alpha|^2},$$

donc nécessairement $\alpha = 0$ et donc G et par conséquent A est diagonalisable.

3. Application

(a) On a $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S = \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2}$, donc d'après la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice $P_k \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $\|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \frac{1}{k+1}$.

(b) la suite $(\|P_k A P_k^{-1}\|_S)_{k \in \mathbb{N}}$ étant bornée, donc on peut extraire une sous-suite $(P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers \tilde{A} , et comme $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée, alors $\tilde{A} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$, donc il existe P inversible telle que $\tilde{A} = PAP^{-1}$.

Mais on a $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\|P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} + \frac{1}{\varphi(k) + 1}$$

et par passage à la limite on obtient :

$$\|\tilde{A}\|_S \leq \sqrt{|\lambda|^2 + |\mu|^2} = \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)} \|B\|_S.$$

Donc la borne inférieure de $\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})\}$ est atteint en \tilde{A} et par conséquent A est diagonalisable.

IV. Cas d'une matrice réelle n'ayant aucune valeur propre réelle

1. On a

$$\begin{aligned} M' &= \frac{2}{\delta} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{2}{\delta} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2ad - 4bc - a^2 - d^2}} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \alpha = \frac{a-d}{\sqrt{2ad - 4bc - a^2 - d^2}} \\ \beta = \frac{2b}{\sqrt{2ad - 4bc - a^2 - d^2}} \\ \gamma = \frac{2c}{\sqrt{2ad - 4bc - a^2 - d^2}} \end{cases}, \text{ et on vérifie facilement que } \alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

2. Si $v = (x, y)$, alors $f(v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x - \alpha y)$ et par conséquent $(v|f(v)) = \alpha x^2 + (\beta + \gamma)xy - \alpha y^2$. Soit y fixé dans \mathbb{R}^* , l'équation $\alpha x^2 + (\beta + \gamma)xy - \alpha y^2 = 0$ est une équation de second degré ($\alpha \neq 0$), dont le discriminant vaut $[(\beta + \gamma)y]^2 + \alpha^2 y^2 \geq 0$, donc pour chaque $y \in \mathbb{R}^*$ on peut trouver x tel que $\alpha x^2 + (\beta + \gamma)xy - \alpha y^2 = 0$, c'est-à-dire $(v|f(v)) = 0$.
Si $f(e) = 0$, alors $e = -f^2(e) = 0$, ce qui est absurde.

3. Les deux vecteurs u_1 et u_2 sont unitaires et orthogonaux, donc la famille $\{u_1, u_2\}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^2, (\cdot|\cdot))$.

On a $f(u_1) = \frac{1}{\|e\|} f(e) = \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} u_2$ et $f(u_2) = -\frac{1}{\|f(e)\|} e = -\frac{\|e\|}{\|f(e)\|} u_1$, donc

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\|e\|}{\|f(e)\|} \\ \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Les deux bases sont orthonormées, donc la matrice de passage U de (e_1, e_2) à (u_1, u_2) est orthogonale et on a la relation $M' = U M_1^t U$ ou encore $\frac{\delta}{2} M' = M - \frac{\text{tr } M}{2} I_2$, d'où :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\delta}{2} M' + \frac{\text{tr } M}{2} I_2 = \frac{\delta}{2} (U M_1^t U) + \frac{\text{tr } M}{2} I_2 \\ &= U \left[\frac{\delta}{2} M_1 + \frac{\text{tr } M}{2} I_2 \right]^t U \\ &= U \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\delta}{2t} \\ \frac{t\delta}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\text{tr } M}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\text{tr } M}{2} \end{pmatrix} \right]^t U \\ &= U \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr } M & \frac{-\delta}{t} \\ t\delta & \text{tr } M \end{pmatrix}^t U \\ &= U \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr } M & -l\delta \\ \frac{\delta}{l} & \text{tr } M \end{pmatrix}^t U = U M_2^t U, \end{aligned}$$

avec $l = \frac{1}{t} = \frac{\|e\|}{\|f(e)\|} > 0$.

5. (a) On a $M'' \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$, donc $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \leq \|M''\|_S = \sqrt{\frac{1}{4} [2(\text{tr } M)^2 + 2\delta^2]} = \sqrt{2 \det M}$.

(b) On a $\|M_2\|_S^2 = \frac{1}{4} \left[2(\text{tr } M)^2 + \delta^2 \left(l^2 + \frac{1}{l^2} \right) \right] \geq \frac{1}{4} [2(\text{tr } M)^2 + 2\delta^2] = \|M''\|_S^2$, car $\forall x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

On sait que M et M'' sont semblables, donc $M'' \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ et comme $\|M''\|_S = \sqrt{2 \det M}$, alors $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S = \|M''\|_S = \sqrt{2 \det M}$.

6. D'après ce qui précède, $\inf\{\|PMP^{-1}\|_S; P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})\} = \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S = \|M''\|_S$, cette borne est atteinte en toute matrice de la forme $UM''U$ où U est orthogonale.
7. **Conclusion :** On sait d'après la question 5. de la partie II que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable ou bien $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et on sait d'après la partie III, que A est diagonalisable si et seulement si $\inf\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est atteint, enfin d'après la partie II et la dernière partie si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ alors $\inf\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est atteint. Réciproquement, si $\inf\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est atteint, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ ou bien $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ et dans ce cas, d'après la partie III.2.(e), A est diagonalisable. Ainsi on a montré que la borne inférieure de $\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})\}$ est atteinte si et seulement si $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.



M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr